

3.4 **10** $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

24 $B = S^{-1}AS$
 $S = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ or
 $A = \begin{bmatrix} 13 & -20 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$

$A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $A \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

30 $B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$B \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

58 a) Assume $A | c_1 A^2 v + c_2 A v + c_3 v = 0$
 $\Rightarrow c_3 A^2 v = 0$
 But $A^2 v \neq 0 \Rightarrow \underline{c_3 = 0}$

b) $T(A^2 v) = A^2 v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $T(A v) = A v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A | c_1 A^2 v + c_2 A v = 0$
 $\Rightarrow c_2 A^2 v = 0 \Rightarrow \underline{c_2 = 0}$
 $c_1 A^2 v = 0 \Rightarrow \underline{c_1 = 0}$

$T(v) = A v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \{A^2 v, A v, v\}$ - basis for \mathbb{R}^3

$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

72 $\text{rank}(A) = n - \text{null}(A) \stackrel{71}{=} n - \text{null}(B) = \text{rank}(B)$

4.1 **4** $\int_0^1 0 dx = 0 \Rightarrow 0 \in EV$

$\int_0^1 (f+g) dx = \int_0^1 f dx + \int_0^1 g dx = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f+g \in V$
 $\int_0^1 (kf) dx = k \int_0^1 f dx = k \cdot 0 = 0 \Rightarrow kf \in V$
 $\Rightarrow V$ -subspace
 Basis $\{x - \frac{1}{2}, x^2 - \frac{1}{3}\}$

10 $0_v \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow 0_v \in EV$ ($\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$)

$(A+B) \vec{x} = A \vec{x} + B \vec{x} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow A+B \in EV$

$(kA) \vec{x} = k(A \vec{x}) = k \cdot \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow kA \in EV \Rightarrow V$ -subspace