LE THEOREME DE M. ARTIN SUR LES SOLUTIONS D'EQUATIONS ANALYTIQUES

par John HUBBARD

§ 1. Germes d'espaces analytiques et espaces formels.

La catégorie GAn des germes d'espaces analytiques a pour objets les espaces analytiques pointés et pour morphismes les germes de morphismes d'espaces analytiques. Si $X = (E,x)$ est un germe d'espace analytique, on pose $O_X = O_{E,x}$. Le foncteur $X \longrightarrow O_X$ est une équivalence de GAn sur la catégorie opposée à celle des algèbres analytiques.

Un espace formel est un espace réduit à un point, muni d'une $\underline{\underline{C}}$-algèbre isomorphe à un quotient d'une algèbre de la forme $\underline{\underline{C}}[[x_1,\ldots,x_n]]$. Les morphismes sont les morphismes d'espaces $\underline{\underline{C}}$-annelés. La catégorie For des espaces formels est donc équivalente à la catégorie opposée celle des $\underline{\underline{C}}$-algèbres formelles.

Pour tout objet $X = (E,x)$ de GAn, on pose $\hat{X} = (x, \hat{O}_X)$. On définit ainsi un foncteur de GAn dans For, et l'inclusion $O_X \hookrightarrow \hat{O}_X$ donne un morphisme d'espace annelé de $\hat{X}$ dans X, fonctoriel en X. Le foncteur $X \longmapsto \hat{X}$ commute aux produits fibrés dans GAn et For.

Soit $\pi : X \longrightarrow S$ un morphisme de GAn (resp. dans For). On pose $\Omega_{X/S} = J/J^2$, considéré comme O_X-module, où J est l'idéal définissant la diagonale dans $X \times_S X$. Si X est un germe d'espace analytique au-dessus de S, on a $\Omega_{\hat{X}/\hat{S}} = O_{\hat{X}} \otimes \Omega_{X/S} = \hat{\Omega}_{X/S}$.

Soient $f, g : X \longrightarrow Y$ deux morphismes dans GAn (resp. dans For). On dit que f et g sont tangents à l'ordre C s'ils coïncident sur le voisinage infinitésimal d'ordre C du point de base de X, i.e. s'ils donnent le même homomorphisme $O_Y \longrightarrow O_X / m^{C+1}$.

Soient X un germe d'espace analytique et soit T un sous espace formel de $\hat{X}$. L'adhérence analytique de T dans X est le plus petit germe de sous-espace analytique Y de X tel que T soit un sous-espace formel de $\hat{Y}$. Autrement dit, c'est le germe de sous-espace analytique de X défini par l'idéal noyau de $O_X \longrightarrow O_T$. Si T est réduit (resp. intègre), il en est de même de son adhérence analytique Y. En effet, O_Y est isomorphe à un sous-anneau de O_T. En revanche, la dimension de Y n'est pas en général égale à la dimension de T, et Y n'est pas nécessairement lisse si T l'est.

Contre-exemple.

Dans $\underline{\underline{C}}^3$, soit $X = \{(x, y, z,) | xz = y^2\}$, et T le sous-espace formel défini abusivement par $T = \left\{ (x, f(x), \frac{(f(x))^2}{x}) \right\}$, où $f(x) = \Sigma_1^\infty n!\, x^n$. L'espace formel T est lisse de dimension 1 ; mais son adhérence analytique est X, qui est de dimension 2 et singulier.

§ 2. Enoncé des résultats.

Soit n un entier. Le théorème de M. Artin est le suivant :

THEOREME 1.- Soit $\pi : X \longrightarrow S$ un germe de morphisme analytique avec S lisse de dimension n, soit $\sigma : \hat{S} \longrightarrow \hat{X}$ une section formelle de π, et soit C un entier. Alors il existe un germe $\tau : S \longrightarrow X$ de section analytique de π, tel que τ soit tangent à σ à l'ordre C.

Nous démontrerons simultanément ce théorème et le résultat suivant :

THEOREME 2.- <u>Soient</u> S <u>un germe d'espace analytique lisse de dimension</u> n , C <u>et</u> N <u>des entiers, et</u> $h : S \times \underline{\underline{C}}^N \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ <u>un germe d'application analytique. Posons</u> $H = h^{-1}(0)$ <u>et</u> $\pi = pr_1 : S \times \underline{\underline{C}}^N \longrightarrow S$. <u>Soient</u> Y <u>un germe de sous-espace analytique de</u> H <u>et</u> $\sigma : \hat{S} \longrightarrow \hat{S} \times \hat{\underline{\underline{C}}}^N$ <u>une section formelle de</u> π , <u>telle que</u> $\operatorname{Im}\sigma \not\subset \hat{H}$ <u>et</u> $\operatorname{Im}\sigma \cap \hat{H} \subset \hat{Y}$. <u>Alors, il existe un germe</u> $\tau : S \longrightarrow S \times \underline{\underline{C}}^N$ <u>de section analytique de</u> π , <u>qui soit tangent à l'ordre</u> C <u>à</u> σ , <u>et tel que</u> $\operatorname{Im}\tau \cap H \subset Y$.

Appelons A_n l'énoncé du théorème 1 et B_n celui du théorème 2. Les énoncés A_o et B_o sont évidents. Nous montrerons que $A_{n-1} \Longrightarrow B_n$ et $B_n \Longrightarrow A_n$.

§ 3. <u>Démonstration de</u> $A_{n-1} \Longrightarrow B_n$.

Commençons par mettre S sous la forme $T \times \underline{\underline{C}}$, de telle sorte que $\hat{h} \circ \sigma(0,\xi)$ ne s'annule pas identiquement, et soit d l'entier tel que

$$\hat{h}(\sigma(0,\xi)) = \xi^d + \dots \quad \text{(termes d'ordre supérieur).}$$

On fait aussi subir à $S \times \underline{\underline{C}}^N$ un automorphisme au-dessus de S de telle sorte que $\sigma(0,\xi) = (0,\xi, y(0,\xi))$, avec $y(0,\xi)$ n'ayant que des termes d'ordre $\geqslant d$ en ξ . Il suffit de soustraire $\sigma(0,\xi)$ tronqué à l'ordre d .

Soit $f : S \times \underline{\underline{C}}^N \longrightarrow \underline{\underline{C}}^m$ un germe d'application analytique tel que $Y = H \cap f^{-1}(0)$.

On note P l'espace des fonctions polynomiales sur $\underline{\underline{C}}$ de degré $< d$, et Γ l'espace des sections $\underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}^{1+N}$ de $pr_1 : \underline{\underline{C}}^{1+N} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ qui sont polynomiales de degré $< d$. On a $P \cong \underline{\underline{C}}^d$ et $\Gamma \cong P^N = \underline{\underline{C}}P^{dN}$.

D'après le théorème de préparation de Weierstrass, il existe un germe d'application analytique $R : T \times \Gamma \longrightarrow P^m$ et un seul tel que la série $h(t, \gamma(\xi)) \in \underline{\underline{C}}\{t, \gamma, \xi\}$ divise la série $f(t, \gamma(\xi)) - R(t,\gamma)(\xi) \in (\underline{\underline{C}}\{t, \gamma, \xi\})^m$. Pour $t \in T$ et $\gamma \in \Gamma$, $R(t, \gamma)$ est la fonction polynomiale de degré $< d$ à valeurs dans $\underline{\underline{C}}^m$ qui coïncide avec $f_t \circ \gamma$ sur $\gamma^{-1}(H_t)$. On a $R(t, \gamma) = 0$ si et seulement si $(\{t\} \times \mathrm{Im}\,\gamma) \cap H \subset Y$.

D'après le théorème de préparation formel, il existe des sections formelles q et ρ de $\hat{S}$ dans $\hat{S} \times \hat{\underline{\underline{C}}}^N$ telles que $\sigma = (\hat{h} \circ \sigma)q + \rho$, avec $\rho(t, \xi)$ polynomiale de degré $< d$ en ξ. Comme $\rho(0,\xi)$ est de degré $< d$ en ξ et que $\sigma(0, \xi)$ et $\hat{h}(\sigma(0, \xi))$ sont d'ordre $\geq d$, on a $\rho(0, \xi) = 0$. On peut donc définir une section formelle $\tilde{\rho} : \hat{T} \longrightarrow \hat{T} \times \hat{\Gamma}$ par $\tilde{\rho}(t) = (t,(\xi \longrightarrow (t, \xi)))$; le point de base a bien pour image l'origine.

Notons X le sous-espace $R^{-1}(0)$ de $T \times \Gamma$. Nous allons montrer que $\mathrm{Im}(\tilde{\rho}) \subset \hat{X}$, ce qui nous permettra d'appliquer A_{n-1}.

En remontant à la définition de R, on voit que ceci est équivalent à demander que $\hat{h} \circ \rho$ divise $\hat{f} \circ \rho$, ou encore que $\mathrm{Im}\,\rho \cap \hat{H} \subset \hat{Y}$. Comme $\mathrm{Im}\,\sigma \cap \hat{H} \subset \hat{Y}$ par hypothèse, il suffit de démontrer $\mathrm{Im}\,\rho \cap \hat{H} = \mathrm{Im}\,\sigma \cap \hat{H}$, ou encore $\hat{h} \circ \rho = (\hat{h} \circ \sigma)$' unité. Par la définition de ρ, $\hat{h} \circ \sigma | \sigma - \rho$; mais $\hat{h} \circ \sigma - \hat{h} \circ \rho$ appartient à l'idéal engendré par $\sigma - \rho$, donc $\hat{h} \circ \sigma | \hat{h} \circ \sigma - \hat{h} \circ \rho$ et $\hat{h} \circ \sigma | \hat{h} \circ \rho$. Posons $(\hat{h} \circ \rho)(t,\xi) = (\hat{h} \circ \sigma)(t,\xi)\, u(t,\xi)$, et il faut voir que le terme constant de u est non nul. On peut se restreindre à la droite $t = 0$, ou $\rho(0, \xi) = (0, \xi, 0)$ et $\sigma(0, \xi) = (0, \xi$, termes d'ordre $> d$ en $)$, donc $\hat{h} \circ \rho \equiv \hat{h} \circ \sigma \mod m^k$, $k > d$. Ceci ne pourrait être le cas si le terme constant de u était nul.

Nous avons maintenant vérifié toutes les hypothèses de A_{n-1}, et il existe donc $\tilde{\rho}_1 : T \longrightarrow T \times \Gamma$ un germe de section analytique de p tel que

$R \circ \tilde{\rho}_1 = 0$ et tel que $\tilde{\rho} \equiv \tilde{\rho}_1 \mod \mathfrak{m}^C$.

Il nous faut maintenant dévisser toute la construction pour retrouver τ . D'abord définissons $\rho_1 : S \longrightarrow S \times \underline{\underline{C}}^N$ germe de section analytique de π , par

$$\rho_1(t,\xi) = (t,\xi,\theta_t(\xi)) \ , \quad \text{où} \ \theta_t(\xi) \ \text{est défini}$$

par $\quad \tilde{\rho}(t)(\xi) = (t,\theta_t(\xi))$.

Ensuite, remarquons qu'il existe $q' : S \longrightarrow S \times \underline{\underline{C}}^N$ section formelle de π telle que $\sigma = (\hat{h} \circ \rho)q' + \rho$. En effet, $\hat{h} \circ \sigma | \sigma - \rho$ par définition, et nous avons vu que $\hat{h} \circ \rho | \hat{h} \circ \sigma$.

Posons $q_1' = q'$ tronqué à l'ordre C , et définissons $\tau = (h \circ \rho_1)q_1' + \rho_1$. Il est évident que $\sigma \equiv \tau \mod \mathfrak{m}^C$, et il faut voir que $\operatorname{Im} \tau \cap H \subset Y$. Mais $\operatorname{Im} \rho_1 \cap H \subset Y$ (ceci n'est qu'une autre manière de dire $R \circ \rho_1 = 0$), et on voit, par un raisonnement identique à celui qui démontre que $\operatorname{Im} \rho \cap \hat{H} = \operatorname{Im} \sigma \cap \hat{H}$, que $\operatorname{im} \rho_1 \cap H = \operatorname{im} \tau \cap H$. τ répond donc à toutes les conditions désirées.

§4 . Plan de la démonstration de $B_n \Longrightarrow A_n$.

On peut supposer que X est l'adhérence analytique de $\operatorname{Im} \sigma$; alors X est intègre, et on a :

LEMME 1.- X est génériquement lisse sur S .

La démonstration du lemme 1 sera donnée au paragraphe 5.

Remarque. X n'est pas nécessairement lisse sur S ; il le serait si σ était analytique.

On peut supposer $X \subset S \times \underline{\underline{C}}^N$, de codimension r , défini par des équations $f_1,\ldots,f_m$, et en notant $y_1,\ldots,y_N$ les coordonnées dans $\underline{\underline{C}}^N$, on peut supposer que la fonction

$$\delta(s,y) = \text{dét}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{1 \leq i,j \leq r}$$

ne s'annule pas identiquement sur X. En effet, les déterminants des mineurs d'ordre r de la matrice

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i} \quad 1 \leq i \leqslant m \text{ , } 1 \leqslant j \leqslant N$$

définissent un sous-espace de $S \times \underline{\underline{C}}^N$ dont l'intersection avec X est le "lieu de ramification" de X sur S, qui est un sous-espace strict de X.

Comme X est l'adhérence analytique de $\operatorname{Im}\sigma$, $\hat{\delta}$ ne s'annule pas non plus identiquement sur $\hat{S}$. Nous appliquerons B_n en prenant $h = \delta^2$, $Y = H \cap X$, σ et π étant les mêmes. On trouve donc une section analytique $\tau : S \longrightarrow S \times \underline{\underline{C}}^N$, tangente à σ à l'ordre C, et telle que $\operatorname{Im}\tau \cap H \subset Y$. Remarquons que l'on emploie une hypothèse plus faible que celle dont nous disposons, et que l'on tire une conclusion plus faible que celle qu'on désire, qui serait $\operatorname{Im}\tau \subset X$ et non pas $\operatorname{Im}\tau \cap H \subset X \cap H$. Le lemme 2, qui suit, nous permet d'améliorer le résultat.

LEMME 2.- *Soit* $g : S \times \underline{\underline{C}}^N \longrightarrow C^r$ *un germe d'application analytique, avec* $r \leqslant n$, *et soit* $C \geqslant 1$ *un entier. Soit* $\tau : S \longrightarrow S \times \underline{\underline{C}}^N$ *un germe de section analytique. Posons* $\delta = \text{dét}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$. *On suppose que* $g \circ \tau \equiv 0 \pmod{(\delta \circ \tau)^2 m^C}$. *Alors, il existe une section analytique* $\tau_1 : S \longrightarrow S \times \underline{\underline{C}}^N$ *telle que* $g \circ \tau_1 = 0$ *et* $\tau_1 \equiv \tau \pmod{(\delta \circ \tau) m^C}$.

La démonstration du lemme 2 sera l'objet du paragraphe 6.

Nous appliquerons le lemme 2 avec $g = (f_1, \ldots, f_r)$, et avec le construit ci-dessus. La conclusion n'est pas encore celle que nous désirons, car elle nous dit seulement que l'image de τ_1 tombe dans l'espace des zéros communs aux r premières équations de f, et cet espace peut contenir strictement X. Le lemme 3 nous dit que si nous avions choisi C suffisamment grand, l'image de τ_1 tombe en fait dans X.

LEMME 3.- Soit $\pi : Y \longrightarrow S$ un germe d'application analytique, avec S irréductible, $\sigma : \hat{S} \longrightarrow \hat{Y}$ une section formelle de π, dont l'adhérence analytique est une composante irréductible X de Y. Alors il existe un entier C tel que, si $\tau : S \longrightarrow Y$ est un germe de section analytique de π satisfaisant à $\sigma \equiv \tau \mod \mathfrak{m}^C$, alors $\operatorname{im}\tau \subset X$.

La démonstration du lemme 3 fera l'objet du paragraphe 7.

§ 5. Démonstration du lemme 1.

Rappelons l'énoncé. Soient X, x et S, s des germes d'espaces analytiques, où nous supposerons S lisse ; $\pi : X \longrightarrow S$ un germe d'application analytique et $\sigma : \hat{S} \longrightarrow \hat{X}$ une section formelle de π, dont l'adhérence analytique est X. Alors X est génériquement lisse sur S.

Nous avons vu que sous les hypothèses du lemme, X est irréductible et réduit, donc génériquement lisse ; X a donc une dimension que nous noterons k ; et nous poserons $\dim S = n$. Soit $\mathcal{N}$ le faisceau analytique cohérent sur X noyau de l'application canonique $\Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/S}$, et appelons ρ le rang générique de $\mathcal{N}$.

L'ensemble des points lisses de X forme un ouvert dense $U \subset X$, l'ensemble des points où $\mathcal{N}$ a rang ρ est aussi un ouvert dense $V \subset X$, sur $U \cap V$ le rang de $d\pi$ est constant et égal à ρ, par conséquent, si $\rho = n$, $d\pi$

est surjectif sur $U \cap V$ qui est dense dans X , et X est génériquement lisse S .

On voit immédiatement que $\rho \leqslant n$ en considérant $d\pi$ sur $U \cap V$; il suffit donc de démontrer $\rho \geqslant n$.

Il y a une suite exacte canonique de faisceau:

$$\pi^*\Omega^1_S \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow 0 \quad ,$$

et comme $\mathcal{N}$ est le noyau de la seconde application, on en tire un morphisme $d\pi : \Omega^1_S \longrightarrow \mathcal{N}$. Ici, Ω^1_S est un $\mathcal{O}_S$ - module et $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{O}_X$ - module ; $d\pi$ est $\mathcal{O}_S$-linéaire pour la structure de $\mathcal{O}_S$-algèbre sur $\mathcal{O}_X$ donnée par $\pi^* : \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_X$. C'est ce que nous appellerons être π^*-linéaire.

On déduit de manière analogue de $\bar\sigma$ un morphisme $\bar\sigma^*\Omega^1_{\hat X} \longrightarrow \Omega^1_{\hat S}$ de faisceaux sur S . Comme $\Omega^1_{\hat X} = \Omega^1_X$ et $\Omega^1_{\hat S} = \Omega^1_S$ on peut composer et trouver une application $d\bar\sigma : \hat{\mathcal{N}} \longrightarrow \hat\Omega^1_S$. $d\bar\sigma$ est $\bar\sigma^*$-linéaire pour l'application $\bar\sigma^* : \hat{\mathcal{O}}_X \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_S$ déduite de $\bar\sigma$. On vérifie aisément que $d\bar\sigma \circ d\hat\pi =$ identité.

Soient M_S , M_X , M_S , M_X les corps de fractions de $\mathcal{O}_S$, $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_S$, $\mathcal{O}_X$ respectivement, et soient $L_X = \{f/g \mid f, g \in \mathcal{O}_X \text{ et } g \circ \sigma \neq 0\}$ et $\hat L_X = \{\bar f/\bar g \mid \bar f, \bar g \in \hat{\mathcal{O}}_X \text{ et } \bar g \circ \bar\sigma \neq 0\}$. Nous obtenons ainsi le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
M_X \arrow[r, hook] & \hat M_X \\
L_X \arrow[u, hook, "="] \arrow[r, hook] & \hat L_X \arrow[u, hook, "\neq"'] \\
\mathcal{O}_{X,x} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \hat{\mathcal{O}}_{X,x} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

L'hypothèse que X est l'adhérence analytique de l'image de $\bar\sigma$ nous donne que $L_X = M_X$, mais il n'est pas vrai en général que $\hat L_X = \hat M_X$; la fonction formelle $g(x,y) = y_i - \bar\sigma_i(x,y)$ qui s'annule sur $\mathrm{im}\,\bar\sigma$ n'est pas en général identiquement nulle. Mais d'autre part, l'application $\bar{\sigma}^* : \hat{\mathcal{O}}_X \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_S$ s'étend à une application $\hat{L}_X \longrightarrow \hat{M}_S$, que nous noterons encore $\bar{\sigma}^*$, mais pas à une application $\hat{M}_X \longrightarrow \hat{M}_S$.

L'application $\pi^* : \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_X$ s'étend à une application $M_S \longrightarrow L_X$ et à une application $\hat{M}_S \longrightarrow \hat{L}_X$ notées π^* et $\hat{\pi}^*$ respectivement. On obtient ainsi des applications

$$d\hat{\pi} \otimes \hat{\pi}^* : \hat{\Omega}^1_S \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_S} \hat{M}_S \longrightarrow \hat{\mathcal{N}} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_X} \hat{L}_X$$

et

$$d\bar{\sigma} \otimes \bar{\sigma} : \hat{\mathcal{N}} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_X} \hat{L}_X \longrightarrow \hat{\Omega}^1_S \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_S} \hat{M}_S ,$$

qui sont $\hat{\pi}^*$ et $\bar{\sigma}^*$ -linéaires respectivement, et qui satisfont à $(d\bar{\sigma} \otimes \bar{\sigma}^*) \circ (d\hat{\pi} \otimes \hat{\pi}^*) = \text{identité}$.

Mais $\hat{\mathcal{N}} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_X} \hat{L}_X$ est un $\hat{L}_X$ module libre de rang ρ , car $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} M_X$ est libre de rang ρ , et $\hat{\mathcal{N}} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_X} \hat{L}_X = \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} M_X \otimes_{M_X} \hat{L}_X$; et $\hat{\Omega}^1_S \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_S} \hat{M}_S$ est un $\hat{M}_S$-espace vectoriel de dimension n pour des raisons analogues. Le lemme 1 suit donc du lemme pûrement algébrique suivant, dont la démonstration sera laissée au lecteur.

LEMME.- <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>des anneaux,</u> $\alpha : A \longrightarrow B$ <u>et</u> $\beta : B \longrightarrow A$ <u>des morphismes tels que</u> $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>des modules libres de rang</u> p <u>et</u> q <u>sur</u> A <u>et</u> B <u>respectivement</u>. <u>Soient</u> $f : E \longrightarrow F$ <u>et</u> $g : F \longrightarrow E$ <u>des applications</u> α <u>et</u> β <u>-linéaires respectivement, tels que</u> $g \circ f = \mathrm{id}$. <u>Alors</u> $p \leqslant q$.

Dans notre cas, cette inégalité donne $n \leqslant \rho$, et c'est ce qu'il fallait démontrer.

§ 6. Démonstration du lemme 2.

On peut sans perte de généralité supposer que $\tau(s) = (s,0)$ et que $r = N$, en rajoutant au besoin les équations $g_j(s,y) = y_j$, $r+1 \leq j \leq N$.

Notons $J_s = (g_s)'\,0$ et $\delta(s) = \text{dét}\, J_s$.

Nous essaierons de résoudre l'équation

(1) $$g(s\,,\,\delta(s)u) = 0 \quad \text{pour } u \text{ en fonction de } s \;.$$

D'après le théorème de Cramer, si M_s désigne la matrice des cofacteurs de J_s,

(2) $$J_s \circ M_s = M_s \circ J_s = \delta(s) I \;.$$

Il existe une application analytique $\varepsilon : S \times \underline{\underline{C}}^N \longrightarrow \underline{\underline{C}}^N$ telle que

$$\lim_{y \to o} \frac{\varepsilon(s,y)}{\|y\|} = 0 \;,$$

et que

$$g(s,y) = g(s,0) + J_s(y) + \varepsilon(s,y) \;.$$

L'équation (1) s'écrit

$$0 = g(s,0) + J_s(\delta(s)u) + \varepsilon(s\,,\,\delta(s)u) \;.$$

Par hypothèse, $g(s,0)$ peut s'écrire $(\delta(s))^2\, g_1(s,0)$, et, si l'on pose $\varepsilon_1(s,u) = \dfrac{\varepsilon(s\,,\,\delta(s)u)}{\delta^2(s)}$, on a encore $\lim\limits_{u \to o} \dfrac{\varepsilon_1(s,u)}{\|u\|} = 0$.

L'équation (2) peut donc s'écrire

$$0 = (\delta(s))^2\, g_1(s,0) + \delta(s)\, J_s(u) + \delta^2(s)\, \varepsilon_1(s,u) \;.$$

En simplifiant par $\delta(s)$ et en substituant (2), on trouve l'équation $\varphi(s,u) = 0$, où

$$\varphi(s,u) = M_s(g_1(s,0)) + u + M_s\, \delta(s)\, \varepsilon_1(s,u) \;.$$

Le jacobien de la matrice $\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}\right)_{1 \leq i\,,\; j \leq N}$, est l'identité en zéro, et on peut donc résoudre pour u en fonction de s par le théorème des fonctions implicites.

§7. <u>Démonstration du lemme</u> 3.

L'espace Y peut s'écrire $X \cup X'$, avec X' un sous-espace fermé de Y ne contenant pas X et il existe donc une section φ de O_Y qui s'annule identiquement sur X' mais pas sur X.

Comme X est l'adhérence analytique de $\operatorname{Im}\sigma$, la série formelle $\varphi \circ \sigma$ n'est pas nulle, et disons qu'elle a des termes non nuls de degré C.

Alors, si $\sigma \equiv \tau \mod m^C$, $\varphi \circ \sigma \equiv \varphi \circ \tau \mod m^C$, et par conséquent $\varphi \circ \tau$ n'est pas la section nulle de O_S, et $\operatorname{Im}\tau \not\subset X'$.

Par conséquent $\operatorname{Im}\tau \subset X$.