

ANALYSE COMPLEXE. — *Itération des polynômes quadratiques complexes*. Note (*) de Adrien Douady et John Hamal Hubbard, présentée par Henri Cartan.

On note M l'ensemble des $c \in \mathbf{C}$ pour lesquels l'ensemble de Julia de $z \mapsto z^2 + c$ est connexe. On montre que M est connexe et on donne une description de M .

Let M be the set of points $c \in \mathbf{C}$ for which the Julia set of $z \mapsto z^2 + c$ is connected. We show that M itself is connected, and a description of M is given.

1. INTRODUCTION. — Les résultats présentés ici ont été obtenus au sein d'un groupe de travail auquel ont participé, outre les auteurs, Monique Hakim, Letizia Héroult, Jacques Peyrière, Pierrette Sentenac, Nessim Sibony, et également Dennis Sullivan. La contemplation des dessins réalisés sur micro ou mini-ordinateur par Véronique Gautheron, Jacques Laminie et Maryvonne Teissier-Daguenet a été déterminante.

On note Σ la sphère de Riemann $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Pour tout $c \in \mathbf{C}$, on note f_c l'application $z \mapsto z^2 + c$ de Σ dans elle-même et K_c l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que $f_c^n(z)$ ne tende pas vers ∞ (en notant f^n l'itérée $f \circ \dots \circ f$). La frontière de K_c est l'ensemble de Julia de f_c . Si $0 \in K_c$, l'ensemble K_c est connexe, et sinon il est homéomorphe à l'ensemble de Cantor ([1], [3]). On note M l'ensemble des $c \in \mathbf{C}$ tels que $0 \in K_c$. Benoît Mandelbrot a obtenu à l'ordinateur une très belle image de M , présentant de petits îlots détachés de la composante principale. Ces îlots sont en fait rattachés par des filaments qui échappent à l'ordinateur :

THÉORÈME 1. — *L'ensemble M est connexe.*

Notons D le disque unité fermé de \mathbf{C} . Pour démontrer le théorème 1, on construit un homéomorphisme analytique $\Psi : \Sigma - D \rightarrow \Sigma - M$, tangent à l'identité en ∞ . Nous allons donner une indication de cette construction, puis, sans démonstration, une description plus précise de M . N. Sibony a également écrit une démonstration du théorème 1.

2. L'APPLICATION Φ . — Pour tout c , il existe un unique germe φ_c d'application analytique de Σ dans elle-même en ∞ , tangente à l'identité en ce point, tel que $\varphi_c \circ f_c \circ \varphi_c^{-1} = f_0 : z \mapsto z^2$. La fonction $\eta_c = \text{Log} |\varphi_c|$ peut être prolongée en une fonction \mathbf{R} -analytique sur $\mathbf{C} - K_c$ par $\eta_c(z) = \lim 2^{-n} \text{Log} |f_c^n(z)|$, et en une fonction continue $\Sigma \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ par $\eta_c(z) = 0$ pour $z \in K_c$ et $\eta_c(\infty) = \infty$. La fonction $(c, z) \mapsto \eta_c(z)$ est continue sur $\mathbf{C} \times \Sigma$. D'autre part η_c est la fonction de Green de K_c .

Pour $c \in M$, la fonction φ_c s'étend en un homéomorphisme analytique de $\Sigma - K_c$ sur $\Sigma - D$. Pour $c \notin M$, la fonction φ_c s'étend en un homéomorphisme analytique de $\Sigma - L_c$, où L_c est l'ensemble des z tels que $\eta_c(z) \leq \eta_c(0)$, sur le complémentaire d'un disque de rayon > 1 . L'ensemble L_c est un compact, limité par une courbe homéomorphe à une lemniscate, et $K_c \subset \overset{\circ}{L}_c$.

Pour $c \notin M$, on a $\eta_c(c) = 2\eta_c(0)$, donc $c \notin L_c$ et on peut poser :

$$\Phi(c) = \varphi_c(c).$$

On pose $\Phi(\infty) = \infty$. On vérifie que Φ est une application analytique de $\Sigma - M$ dans $\Sigma - D$, propre et de degré 1. C'est donc un isomorphisme analytique, et on pose $\Psi = \Phi^{-1}$.

3. COMPOSANTES CONNEXES DE L'INTÉRIEUR DE M . — L'intérieur $\overset{\circ}{M}$ de M est l'ensemble des c tels que f_c admette un point périodique attractif [4], et M est l'adhérence de $\overset{\circ}{M}$. Pour chaque composante connexe U de $\overset{\circ}{M}$, on définit une fonction $\rho : U \rightarrow \overset{\circ}{D}$ de la façon

suivante : il existe un entier k tel que, pour tout $c \in U$, f_c admet un point périodique attractif a de période k ; comme il n'y a qu'un cycle attractif, $(f_c^k)'(a)$ est indépendant du choix de a dans ce cycle et on peut le noter $\rho(c)$.

THÉORÈME 2. — Pour toute composante connexe U de \hat{M} , l'application ρ est un homéomorphisme analytique de U sur \hat{D} .

L'application ρ admet un prolongement en un homéomorphisme de \bar{U} sur D , analytique sauf éventuellement en $\rho^{-1}(1)$. Nous appellerons *racine* de U le point $\rho^{-1}(1)$ et *centre* de U le point $\rho^{-1}(0)$. Le centre de U est l'unique $c \in U$ tel que f_c admette un point périodique superattractif. Tout $c \in \partial U$ tel que $\rho(c)$ soit de la forme $e^{2\pi i t}$ avec t rationnel est la racine d'une composante U' de \hat{M} ; on dit que U' se déduit de U par bifurcation.

4. **PROLONGEMENT RADIAL DE Ψ .** — Il est vraisemblable que $\Psi : \Sigma - D \rightarrow \Sigma - M$ admet un prolongement continu de $\Sigma - \hat{D}$ dans Σ . Nous savons seulement démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — Pour tout $\theta \in \mathbf{Q}$, l'application $r \mapsto \Psi(re^{2\pi i \theta})$ a une limite c_θ quand r tend vers 1.

Complément. — (a) Si θ est de la forme $p/2^k$, pour $c = c_\theta$ le point $f_c^{k+1}(0)$ est le point fixe le plus répulsif de f_c .

(b) Plus généralement, si θ est de la forme p/q avec q pair et p impair, par f_c le point 0 tombe en un temps fini sur un cycle répulsif.

(c) Si θ est de la forme p/q avec q impair, le point c_θ est la racine d'une composante connexe de \hat{M} .

5. **L'ARBRE H_c .** — Soit $K \subset \mathbf{C}$ un compact tel que $\mathbf{C} - K$ soit connexe et que, pour toute composante connexe U de \hat{K} , la représentation conforme de U sur \hat{D} s'étende en un homéomorphisme de \bar{U} sur D . Nous dirons qu'une partie A de K est *K-convexe* si A est connexe et $K \cap \bar{U}$ géodésiquement convexe (pour la métrique de Poincaré de U) pour toute composante connexe U de \hat{K} . L'intersection d'une famille de parties *K-convexes* est *K-convexe*, ce qui permet de définir l'enveloppe *K-convexe* d'une partie de K .

Soit $c \in M$ tel que l'orbite directe de 0 par f_c soit finie. Ceci peut se produire de deux façons : ou bien c est le centre d'une composante connexe U de \hat{M} , ou bien 0 tombe en un temps fini par f_c sur un cycle répulsif (dans ce cas $\hat{M} = \emptyset$). Pour un tel c , nous noterons H_c l'enveloppe K_c -convexe de l'orbite directe de 0 par f_c . C'est topologiquement un arbre fini. Les valeurs de θ associées à c sont celles pour lesquelles on a ou bien $c_\theta = c$, ou bien c_θ est la racine de la composante de \hat{M} de centre c (dans ce cas K_{c_θ} et K_c sont homéomorphes).

Nous considérons H_c comme muni de sa topologie, de la classe d'isotopie de son plongement dans $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ (ou ce qui revient au même de l'ordre cyclique des brins aux points de branchement), et de la suite de points (x_n) définie par $x_n = f_c^n(0)$. A partir de ces données, on peut déterminer les valeurs de θ associées à c par l'algorithme suivant :

Soit $H \subset \mathbf{R}^2$ un arbre, muni d'une suite (x_n) de points telle que l'ensemble des x_n soit fini.

Pas 1. — On construit une application continue $F : H \rightarrow H$, vérifiant :

(i) $F(x_n) = x_{n+1}$;

(ii) Pour chacune des composantes connexes H_i de $H - \{x_0\}$ (il y en a au plus deux), F s'étend en un homéomorphisme \tilde{F} d'un voisinage de H_i sur un ouvert de \mathbf{R}^2 , préservant l'orientation.

Si c'est possible (c'est le cas si H est de la forme H_c), ça l'est de façon unique à l'isotopie près.

Pas 2. — On étend H en un arbre $H' \subset \mathbf{R}^2$ et on prolonge F en $F' : H' \rightarrow H'$ satisfaisant (ii) de façon que :

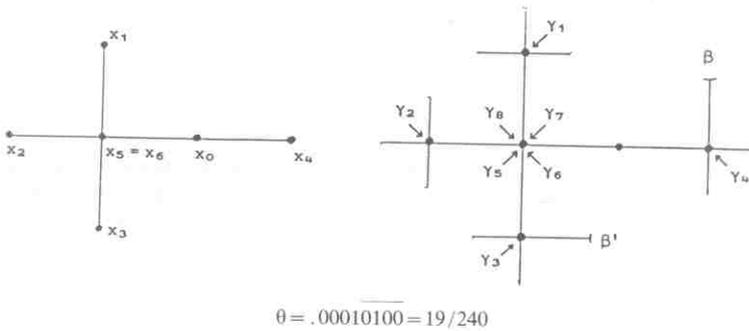
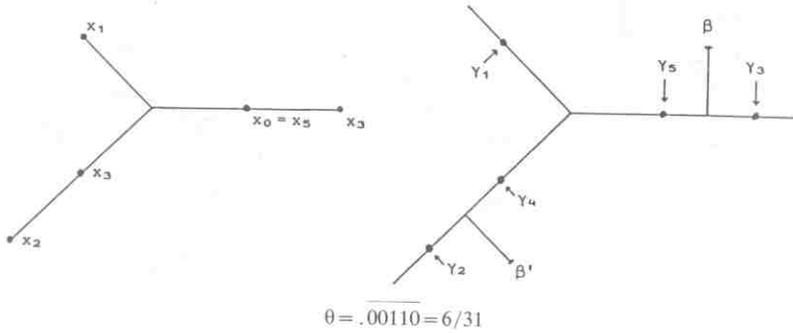
- (a) il existe un $\beta \in H'$, extrémité de H' , fixe par F' ;
- (b) il existe un $\beta' \in H'$, extrémité de H' , tel que $\beta' \neq \beta$ et $F'(\beta') = \beta$;
- (c) Pour tout n tel que $x_n \neq x_0$, l'application F' est un homéomorphisme local de H' sur lui-même au voisinage de x_n .

Ceci est possible, et combinatoirement il n'y a qu'une façon minimale de le faire.

Pas 3. — Choisissons une voie d'accès γ à x_1 (i.e. une classe d'homotopie de chemins appliquant $[0, 1[$ dans $\mathbf{R}^2 - H'$ et 1 en x_1). On définit la suite (γ_n) , où γ_n est une voie d'accès à x_n , par $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_{n+1} = \tilde{F}'(\gamma_n)$ si $x_n \neq x_0$ et $\gamma_{n+1} = \gamma_1$ si $x_n = x_0$. On définit alors la suite (ε_n) : Si on rencontre β, γ_n, β' dans cet ordre en tournant autour de H dans le sens direct, on pose $\varepsilon_n = 0$; si on les rencontre dans l'ordre β, β', γ_n on pose $\varepsilon_n = 1$. Si $x_N = \beta'$, on pose $\varepsilon_N = 1$ et $\varepsilon_n = 0$ pour $n > N$.

Le nombre θ dont les chiffres en base 2 sont les ε_n , à savoir $\theta = \sum \varepsilon_n 2^{-n}$, est associé à H . Les différentes voies d'accès à x_1 donnent les différentes valeurs de θ .

Exemples :



6. POINTS SUR LA CARDOÏDE ET SUR \mathbf{R} . — Pour $t \in [0, 1]$, soit $\gamma(t) = (\lambda/2) - (\lambda^2/4)$, où $\lambda = e^{2\pi i t}$. La fonction $f_{\gamma(t)}$ est l'unique fonction f_c admettant un point fixe α avec $f'(\alpha) = \lambda$. Si t est irrationnel (resp. rationnel), il existe une valeur $\theta(t)$ [resp. deux valeurs $\theta_-(t)$ et $\theta_+(t)$]

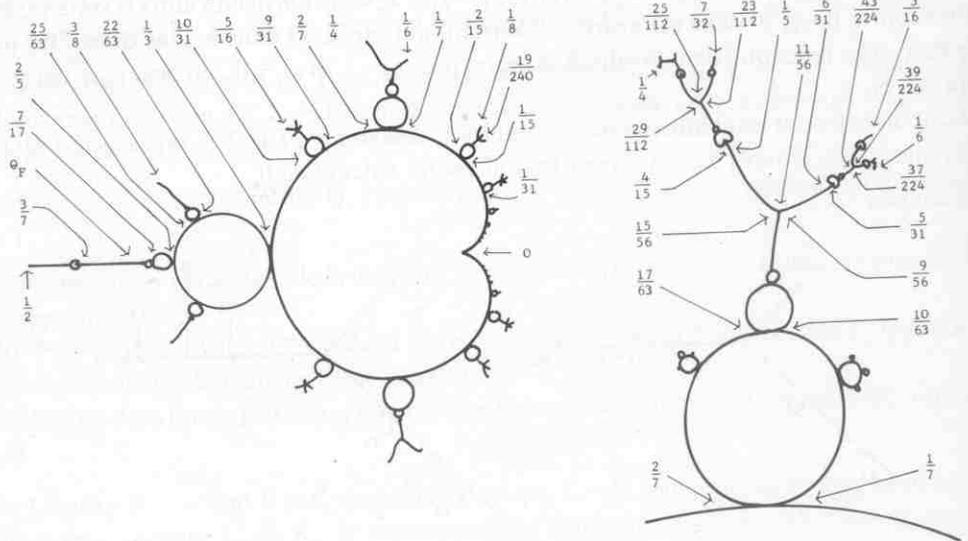
de θ telles que $\Psi(re^{2\pi i \theta})$ tende vers $\gamma(t)$ quand r tend vers 1. Si $t \notin \mathbf{Q}$, on a $\theta(t) = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-E(p/t)}$,

où $E(m)$ désigne la partie entière de m . Si $t \in \mathbf{Q}$, on a des formules analogues, avec $E_-(m) = E(m)$, $E_+(m) = E(m)$ si $m \notin \mathbf{Z}$ et $E_+(m) = E(m) - 1$ si $m \in \mathbf{Z}$. L'ensemble des valeurs de θ ainsi obtenues est homéomorphe à l'ensemble de Cantor, et de mesure nulle.

Pour certaines valeurs de t , qui sont des nombres de Liouville, l'ensemble $K_{\gamma(t)}$ n'est pas localement connexe.

Notons x_n le n -ième point de bifurcation réel à partir de la cardioïde. Les points x_n ont pour limite le point de Feigenbaum $x_F = 1,401\dots$ et $(x_n - x_F)/(x_{n+1} - x_F)$ tend vers le rapport de Feigenbaum $4,6692\dots$ [2].

On a $x_n = c_{p_n/q_n}$ où $q_n = 2^{2^{n-1}} + 1$ [de sorte que $q_1 = 3$ et $q_{n+1} = q_n(q_n - 2) + 2$] et $p_1 = 1$, $p_{n+1} = p_n(q_n - 2) + 1$. La suite (p_n/q_n) a pour limite le nombre de Morse θ_F dont l'écriture en base 2 est $0,0110100110010110\dots$: ses chiffres ε_n vérifient $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_{2^k+k} = 1 - \varepsilon_k$ pour $0 < k \leq 2^k$. La suite $p_n/q_n - \theta_F$ tend vers zéro plus vite que toute progression géométrique.



(*) Remise le 21 décembre 1981.

- [1] P. FATOU, *Bulletin Soc. Math. Fr.*, 47, 1919, p. 161-271; *Ibidem*, 48, 1920, p. 33-94 et 208-314.
- [2] M. J. FEIGENBAUM, *J. Stat. Phys.*, 19, (1), 1978.
- [3] G. JULIA, *J. Math. Pures et Appl.*, Sér. 8. 1, 1918, p. 47-245.
- [4] P. SAD, *On the Iteration of Rational Functions* (à paraître).

Département de Mathématiques, Université de Paris-Sud 91000 Orsay
et Department of Mathematics, Cornell University, 14853 Ithaca, N.-Y., États-Unis.