Фридрих Карпелевич: Его первые шаги в математике

Е. Б. Дынкин

November 17, 2007

Как и у многих математиков его поколения, математическая биогафия Карпелевича началась в школьном математическом кружке при МГУ. Его первые научные публикации относятся ко времени, когда он учился на первом и втором курсах. Наше научное общение продолжалось много лет и прервалось в 1976 году с моим отъездом в Америку. Мы встретились снова через 13 лет, когда я приехал в Москву по програме обмена между академиями наук СССР и США. Тогда я записал на магнитофон его воспоминания о первых шагах в математике. Три отрывка из этих воспоминаний будут проиграны в конце моего выступления.

Впервые мы встретились с Фридрихом в 1946 году, когда он был школьником, а я аспирантом. В это время я вел второй год секцию школьного математическо- го кружка при МГУ. Помимо Карпелевича еще несколько участников секции (Агранович, Березин, Ченцов, Минлос, Успенский, Юшкевич) впоследствии внесли заметный вклад в различные области математики. Очень скоро Карпелевич выделился решением ряда интересных задач. Об одной из этих задач вы услышите в первом отрывке из его воспоминаний.

В 1947 году несколько активных членов кружка (включая Фреда) поступили на мехмат МГУ, а кружок преобразовался в семинар для первокурсников. Семинар продолжался под разными названиями в течение ряда лет. В 1955 году он разделился на семинар по алгебре и семинар по теории вероятностей. Студенты, работавшие в этих семинарах, пощрялись не только решать задачи, но и готовить для публикации свои решения. Таким образом появились первые публикации Добрушина, Карпелевича, Кириллова, Маргулиса, Синая и Успенского. О своей первой заметке (напечатанной в Успехах математичес- ких наук) Карпелевич рассказывает во втором отрывке воспоминаний.

На втором курсе Карпелевич внес свой первый серьезный вклад в математику, найдя полное описание множества всех собственных значений матриц порядка n с положительными элементами. Эта задача, поставленная Колмогоровым в 1938 году, была решена лишь частично Дмитриевым и Дынкиным в 1945 году. Позже я расскажу подробнее об этой задаче.

Начиная с четвертого курса центром научных интересов Фридриха становятся группы Ли и симметрические пространства. Он получает ряд замечательных результатов о полупростых подалгебрах вещественных полупростых алгебр Ли. Эти результаты вошли в его кандидатскую диссертацию и были удостоены премии Московского математического общества.

Фред был одним из самых блестящих студентов своего курса. Однако в 1952 году его не приняли в аспирантуру, несмотря на высокое мнение о нем Колмогорова и Петровского (в семинаре которого Карпелевич также успешно работал), а вместо этого направили на работу в Новочеркасский техникум. По возвращении в Москву он стал преподавать в МИИТе. Миновав аспирантуру, он защитил кандидатскую диссертацию в 1957 году.

Карпелевич был одним из активных участников семинара по группам Ли, который я вел в 1957-1962 годы. В этом семинаре началась его получившая широкое признание работа о границах симметрических пространств, основанная на изучении асимптотического поведения геодезических. О работах Карпелевича по группам Ли и симметрическим пространствам будут говорить другие докладчики. Я же остановлюсь на его студенческой работе о характеристических корнях стохастических матриц.

Задача была поставлена А. Н. Колмогоровым в 1938 году. Дискретная Марковская цепь с n состояниями определяется матрицей $P = (p_{ij})$, где p_{ij} - вероятности перехода из состояния i в состояние j. Матрицы, удовлетворяющие условиям

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_j p_{ij} = 1 \quad \text{для всех } i,$$

называются стохастическими. Все собственные значения стохастической матрицы лежат в единичном круге, и одно из них равно 1. Асимптотическое поведение P^m определяется характеристическими корнями матрицы P. Так возникает задача: описать множество M_n характеристических корней всех стохастических матриц порядка n.

Если $A = (a_{ij})$ произвольная матрица порядка n с положительными элементами и если ρ - максимальное абсолютное значение ее характеристических корней, то все эти корни принадлежат множеству ρM_n.

В 1938 году, выступая с докладом о цепях Маркова на заседании Московского математического общества, Колмогоров поставил аналогичную задачу для процессов Маркова с непрерывным временем. Такие процессы задаются полугруппой стохастических матриц

$$P_t = e^{tA}, t \geq 0.$$

Все характеристические корни A принадлежат множеству

$$U_n = \bigcup_{r \geq 0} r(M_n - 1).$$

Это угол ограниченный лучами, выходящими из точки 1 и проходящими через точки $e^{i\varphi_n}$ и $e^{-i\varphi_n}$, где $0 \leq \varphi_n \leq \pi/2$. Первоначальная задача Колмогорова состояла в определении φ_n.

Общая задача - описать множество M_n - была поставлена на семинаре Колмогорова в 1945 году. Частичное решение, достаточное для определения

φ_n (которое оказалось, как и предполагал Колмогоров, равным $2\pi/n$) было найдено студентами пятого курса Дмитриевым и Дынкиным. В частности, они полностью описали M_n для $n \leq 5$. Решение для любого n было получено Карпелевичем в 1950 году.

Дмитриев и Дынкин заметили, что $\lambda \in M_n$ тогда и только тогда, когда $\lambda V \subset V$, где V выпуклая оболочка каких-нибудь точек $z_1, \dots, z_n$. Назовем множество V мультипликативным, если оно содержит вместе с любыми двумя точками их произведение. Примером циклического множества является выпуклая оболочка последовательности $1, \mu, \mu^2, \mu^3, \dots$. Легко видеть, что M_n содержит все мультипликативные k-угольники при $k \leq n$. Дмитриев и Дынкин доказали: при $n \leq 5$, M_n является объединением всех циклических k-угольников при $k \leq n$. Они предположили, что это верно и при $n > 5$. Насколько мне известно, эта гипотеза не доказана и не опровергнута до сих пор. Однако Карпелевич доказал, что она верна, если назвать циклическим многоугольником выпуклую оболочку точек $\lambda^m \gamma$, где $m = 1, 2, 3, \dots$, а γ пробегает все значения p-ого корня из единицы (для фиксированного $p \leq n$). Этот результат позволил ему написать явные уравнения кривых, задающих границу M_n. Доказательства основаны на тонких геометрических и теоретико-числовых аргументах. Его работа цитируется во многих статьях и книгах, посвященных матрицам с положительными элементами, и ее причисляют к числу классических работ в этой области.